

Kombinatoryka - zadania dodatkowe

1. Ile jest...

- a) liczb sześciocyfrowych nieparzystych o niepowtarzających się cyfrach?
- b) permutacji zbioru cyfr, takich, że 3 i 5 stoją obok siebie?
- c) dzielników liczby 20^{23} ?
- d) permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 2k\}$, takich że żadne dwie liczby parzyste nie stoją obok siebie?
- e) zestawów ocen z sześciu egzaminów z różnych przedmiotów?
- f) zestawów ocen z sześciu egzaminów, jeśli nie ma znaczenia jaka ocena została otrzymana z jakiego egzaminu?
- g) rozdań w brydżu? W brydżu wszystkie karty z talii rozdzielamy po równo między czterech graczy. Kolejność kart u danego gracza nie ma znaczenia, kolejność graczy ma znaczenie.
- h) sposobów przestawienia liter w słowie MATEMATYKA, które zawierają pod-słowo MAT?
- i) permutacji zbioru $[15]$, takich że 1 i 2 stoją obok siebie, 3 i 4 stoją obok siebie, a 1 i 9 nie sąsiadują ze sobą?
- j) liczb 8-cyfrowych palindromicznych?
- k) k -wyrazowych ciągów nierosnących o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$?
- l) liczb postaci $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, gdzie a, b, c, d są liczbami naturalnymi dodatnimi, o sumie wykładników mniejszej bądź równej 9?
- m) liczb czterocyfrowych o sumie cyfr większej od 6?
- n) permutacji zbioru $\{2, 4, 6, \dots, 24\}$ mających dokładnie trzy punkty stałe?
- o) sposobów, na które Szymon może codziennie w grudniu odwiedzać jedną z swoich koleżanek, tak aby każda została odwiedzona co najmniej raz?

2. Na ile sposobów można...

- a) wybrać z n -osobowej grupy k -osobową reprezentację z liderem?
- b) wybrać z n -osobowej grupy reprezentację z liderem (dowolnej liczebności)?

3. W pewnym wesołym miasteczku dostępnych jest 5 atrakcji. Wstęp na cztery z nich kosztuje 3 tokeny, a na piątą wstęp kosztuje 5 tokenów. Masz 24 tokeny i chcesz wydać wszystkie. Na ile sposobów możesz to zrobić, jeśli kolejność odwiedzania atrakcji nie ma znaczenia?

4. Ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których suma cyfr wynosi osiem?

5. Na ile sposobów możemy rozsadzić 6 mężczyzn i 6 kobiet przy okrągłym stole, tak aby co najmniej jedna kobieta usiadła obok innej kobiety?

6. Danych jest n zadań i k komputerów. Na ile sposobów można przydzielić zadania komputerom, jeśli:
- zadania i komputery są rozróżnialne?
 - komputery są rozróżnialne, a zadania nie?
7. Ile jest par (A, B) podzbiorów zbioru $X = \{2, 3, \dots, r\}$, takich że $A \neq \emptyset$, $A \subset B$, $A \neq B$, $B \neq X$?
8. Poruszamy się w układzie kartezjańskim z punktu $(0, 0)$ do punktu $(4, 11)$. Na ile sposobów możemy to zrobić, jeśli:
- możemy poruszać się tylko w prawo lub do góry?
 - możemy poruszać się tylko w prawo lub do góry, ale nie możemy iść dwa razy pod rząd w prawo?
 - możemy poruszać się tylko w prawo lub do góry, ale nie możemy iść dwa razy pod rząd do góry?
 - możemy poruszać się w prawo, do góry lub po skosie prawo-góra?
9. Na ile sposobów można rozsadzić k kobiet i k mężczyzn:
- dookoła okrągłego stołu z $2k + 1$ miejscami, jeśli żadne dwie kobiety nie mogą siedzieć obok siebie?
 - na ławce z $2k + 1$ miejscami, jeśli żadne dwie osoby tej samej płci nie mogą siedzieć obok siebie?
10. Na ile sposobów można rozdać 15 cukierków 4 studentom i 5 studentkom, jeśli
- cukierki są jednakowe?
 - cukierki są rozróżnialne?
 - cukierki są jednakowe, a każda studentka ma otrzymać co najmniej jednego cukierka?
 - jeden cukierek jest wiśniowy, jeden cukierek jest bananowy, a pozostałe malinowe i każda osoba ma dostać co najmniej jednego cukierka?
11. Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$, spełniających następujące warunki:
- rozwiązania są nieujemne,
 - rozwiązania są dodatnie,
 - $x_1 \geq 3$, $x_2, x_3 \geq 0$, $x_4 \geq -2$, $x_5 \geq 5$.
12. Niech $\sigma = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ będzie dowolną permutacją zbioru $[n]$ (rozumianą jako ciąg).
- Ile jest permutacji σ niebędących ciągami monotonicznymi?
 - Ile jest permutacji σ takich że $a_i + a_{n-i+1} = a_j + a_{n-j+1} \forall i, j \in [n]$?

- c) Dane są liczby naturalne $1 < k < m \leq n$. Dla każdej permutacji σ przez $g(\sigma)$ oznaczamy największą liczbę $j \leq n$, taką że $a_i < a_{i+1}$ dla wszystkich $i < j$. Ile jest permutacji σ , dla których $g(a) = k$ oraz $a_k = m$?
13. Na ile sposobów można rozsadzić $3k$, $k \geq 2$ osób przy dwóch okrągłych stołach, mieszczących odpowiednio $2k$ i k osób, tak by dwie spośród nich A oraz B siedziały obok siebie?
14. Ile jest 9-cyfrowych liczb utworzonych z cyfr z multizbioru $\{1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 8\}$? Ile jest 9-cyfrowych liczb palindromicznych utworzonych z cyfr z tego multizbioru? A 8-cyfrowych palindromicznych?
15. Na ile sposobów można rozmieścić 30 owoców w dokładnie 7 koszach, jeśli:
- a) owoce to jabłka, a kosze są pokolorowane?
 - b) owoce są różne, a kosze są identyczne?
 - c) owoce są różne, a kosze ponumerowane?
 - d) owoce to jabłka, a kosze identyczne?
16. Wycieczka 20-osobowa planuje odwiedzić równocześnie atrakcje Paryża: wieżę Eiffla, Lurw i katedrę Notre Dame. Na każdą z tych atrakcji musi się zapisać co najmniej jedna osoba. Odpowiedz i uzasadnij, na ile sposobów mogą się podzielić, jeśli:
- a) Zosia ma lęk wysokości i nie chce iść na wieżę Eiffla?
 - b) Tomek i Darek się nie lubią, więc nie mogą iść na tę samą atrakcję?
17. Dookoła pączka lukrem zostają zapisane litery słowa MARMOLADA. Odpowiedz i uzasadnij, na ile sposobów może to być zrobione, jeśli:
- a) musi się pojawić podśłowo DAR?
 - b) zmieści się tylko 8 liter i nie może być podśłowa DA?